CARLO FELICE MANARA

Identità birazionale dei piani tripli aventi una stessa curva di diramazione

INDEFESSVS AGENDO

SOCIETÀ TIPOGRAFICA MODENESE
EDITRICE IN MODENA — 1951

CARLO FELICE MANARA

Identità birazionale dei piani tripli aventi una stessa curva di diramazione

SOCIETÀ TIPOGRAFICA MODENESE
EDITRICE IN MODENA — 1951

Atti del Seminario Matematico e Fisico dell' Università di Modena
Direttore: CATALDO AGOSTINELLI

Estratto dal Volume V — 1950-51

Società Tipografica Modenese - Editrice in Modena - 1951

Sunto.

Si dimostra la identità birazionale di tutti i piani tripli aventi una medesima curva di diramazione.

§ 1. — La presente Nota è dedicata alla dimostrazione della identità birazionale di tutti i piani tripli aventi una medesima curva di diramazione.

Come è noto [1] è stata dimostrata la unicità birazionale del piano triplo diramato da una data curva φ, quando esso possa pensarsi ottenuto proiettando su di un piano una superficie algebrica Φ di ordine N da un suo punto O multiplo secondo $N-3$ nel caso in cui la Φ possa ridursi, con una trasformazione di de Jonquières di centro O, a possedere come sole singolarità una curva tripla non passante per O nè avente corde per O.

Invero ogni piano triplo di questa classe, che può considerarsi abbastanza ampia, scelto il punto O nel punto Z_∞, improprio dell'asse delle z, ammette un modello proiettivo del tipo

$$(1) \qquad a\, z^3 + 3\, b\, z^2 + 3\, c\, z + d = 0$$

in cui i polinomii (in x, y) $a, b, c, d,$ hanno i gradi formanti una progressione aritmetica e sono per il resto del tutto generici, cosicchè la curva di diramazione φ è rappresentabile *per intero* (cioè senza l'aggiunta di parti essenzialmente non diramanti) uguagliando a zero il discriminante della (1) nella forma

$$(2) \qquad \varphi = a^2 d^2 + 4\, a\, c^3 - 6\, a\, b\, c\, d - 3\, b^2 c^2 + 4\, b^3 d = 0$$

In queste ipotesi la dimostrazione della unicità birazionale è stata ottenuta facendo appello al fatto che le curve (2) costituiscono un unico sistema continuo e pertanto, con variazione continua dei

(1) O. CHISINI e C. F. MANARA, *Sulla caratterizzazione delle curve di diramazione dei piani tripli*, «Annali di Matem», (IV), T. XXVI (1947).

polinomii $a\ b\ c\ d$, ognuna di esse può ridursi ad una forma limite costituita da una curva doppia spezzata $b^2 c^2 = 0$ in modo che le cuspidi si portino a terne nelle intersezioni delle curve $b = 0$, $c = 0$.

La conclusione segue allora in base ad un noto risultato di O. CHISINI (²).

Ma è noto che non tutti i piani tripli appartengono alla classe ora considerata. Il più semplice esempio di piano triplo non appartenente ad essa si ha considerando quello, diramato da una sestica con nove cuspidi, che si ottiene proiettando una superficie del IV ordine dotata di due rette doppie sghembe, da un suo punto.

Ora il ragionamento sopra esposto appare molto difficilmente estendibile al caso generale di piano triplo, il quale può sempre ritenersi rappresentato ancora da una equazione del tipo (1) in cui però i polinomii $a\ b\ c\ d$ non sono più generici ma sono legati tra loro in modo che la curva di diramazione non è più rappresentata nella forma (2) ma soddisfa alla relazione più generale

$$h^2 \varphi = a^2 d^2 + 4\, a\, c^3 - 6\, a\, b\, c\, d - 3\, b^2 c^2 + 4\, b^3 d \tag{3}$$

dove la curva $h = 0$ è non diramante per la funzione $z\,(x, y)$ definita implicitamente dalla (1).

Abbiamo pertanto affrontato la questione qui di nuovo per altra via, in modo da giungere allo scopo senza sottoporre a variazioni la curva di diramazione φ assegnata. Per non complicare ulteriormente la ricerca la curva è stata supposta irriducibile e generica; tuttavia è chiaro che i risultati conseguiti si estendono senz'altro per continuità ai relativi casi limiti.

Vale la pena di rilevare esplicitamente che i risultati qui conseguiti porgono una conferma indiretta dei teoremi citati di O. CHISINI (²) relativi alla unicità birazionale delle funzioni algebriche di due (o più) variabili aventi una data varietà di diramazione.

Ricordiamo inoltre che altrove (³) abbiamo messo in rilievo quanta parte possa avere la unicità birazionale di un piano triplo

---

(²) O. CHISINI, *Sulla identità birazionale di due funzioni algebriche di due variabili possedenti una medesima curva di diramazione*, «Rend. Ist. Lomb.», Vol. 77, (1944).

O. CHISINI, *Sulla identità birazionale di due funzioni algebriche di più variabili dotate di una medesima varietà di diramazione*, «Rend. Ist. Lomb.», Vol. 80, (1947).

(³) C. F. MANARA, *Sulla caratterizzazione delle ipersuperficie di diramazione degli* S_n *tripli*, «Rend. Ist. Lomb.», Vol. 82, (1949).

diramato da una data curva nella risoluzione del problema di esistenza di una funzione algebrica a tre valori di n (> 2) variabili. Rimane quindi giustificata la speranza che quanto è qui dimostrato possa validamente contribuire a risolvere la questione della caratterizzazione delle varietà di diramazione degli S_n tripli generali.

§ II. — Sia dunque data nel piano x, y la curva irriducibile φ che sia di diramazione per una funzione algebrica a tre valori delle due variabili indipendenti x, y ovvero, come diremo brevemente, per un piano triplo rappresentato sul piano x, y. Indicheremo con m l'ordine di φ (che risulta essere essenzialmente pari) ed il numero delle sue cuspidi con k.

In tutta la presente trattazione supporremo che φ sia generica nel sistema continuo di curve di diramazione aventi tutte lo stesso suo ordine e le stesse singolarità. Come è noto ciò significa in particolare che φ non abbia altre singolarità all'infuori delle cuspidi, e che queste siano essenziali ad essa, come curva di diramazione, cioè siano traccie, sul piano x, y, di rette per Z_∞ aventi con la superficie F (fuori di Z_∞) un contatto tripunto in un suo punto semplice.

L'importanza di quest'ultima conseguenza dell'ipotesi posta appare chiara a chi consideri che, in caso contrario, i risultati che abbiamo in vista non sarebbero più conseguibili, come lo dimostra il noto esempio elementare fornito dal caso in cui la curva sia la già ricordata sestica con *nove cuspidi*; questa è di diramazione appunto per il piano triplo sopra descritto ed anche per quello che si ottiene proiettando da un punto esterno una superficie cubica dotata di tre punti biplanari; i quali però, in questo secondo caso, danno origine a tre cuspidi che non sono essenziali alla φ (intesa come curva di diramazione) nel senso sopra precisato.

Una prima conseguenza di questa ipotesi è che una superficie Φ che, proiettata da Z_∞ sul piano x, y dà origine ad un piano triplo diramato da φ, non può ammettere singolarità isolate (fuori di Z_∞) che verrebbero proiettate in singolarità accidentali di φ, nè curve doppie a carattere cuspidale nè curve luogo di punti di contatto di tangenti, passanti per Z_∞, più che bipunte, che darebbero origine a parti doppie diramanti di φ.

Quindi F ammetterà soltanto un certo numero di curve doppie o multiple (proprie o infinitamente vicine a Z_∞) sprovviste di punti che facciano diminuire il genere della sezione piana passante per essi rispetto a quella generica.

Pertanto potremo supporre ancora il nostro piano triplo rappresentato da un modello proiettivo

$$a z^3 + 3 b z^2 + 3 c z + d = 0 \tag{4}$$

che diremo brevemente «modello proiettivo generale» in cui la curva $a = 0$ sia in posizione del tutto generica rispetto alla curva φ, ed in particolare non passi per le cuspidi di φ e non possegga singolarità nei punti in cui la incontra.

Come è noto ([4]) è possibile costruire due polinomii p e q primi tra loro, i cui ordini possono essere indicati con 2ν e 3ν rispettivamente (con ν intero) in modo che sussista la relazione

$$a^2 \varphi = 4 p^3 + q^2 \tag{5}$$

Tali polinomii p e q sono definiti dalle relazioni

$$\begin{cases} f^2 p = a c - b^2 \\ f^3 q = a^2 d - 3 a b c + 2 b^3 \end{cases}$$

dove $f = 0$ rappresenta una curva non diramante per il nostro piano triplo.

Inoltre per le curve $a = 0$, $p = 0$ e $q = 0$ si verificano le seguenti circostanze:

1) le $p = 0$ e $q = 0$ sono aggiunte alla φ; in particolare in ogni cuspide di φ la $q = 0$ è tangente alla relativa tangente cuspidale;

2) la $p = 0$ è tangente alla φ ovunque la incontra fuori delle cuspidi in un gruppo di punti, che indicheremo con T; in ognuno di essi la curva $q = 0$ ha un nodo, con una tangente nodale tangente alla φ (ed alla $p = 0$);

3) in ognuno dei punti T passa pure la $a = 0$ che è ivi tangente alla φ (ed alla $p = 0$).

Dalla relazione (5) si ricava pure che, detto R un gruppo di punti allineati di φ, e K il gruppo delle sue cuspidi, si ha

$$T + K \equiv \nu R$$

Infatti dalla (5) stessa si ha che la funzione $u^2 = p$ non dirama sulla curva φ e pertanto, in base a noti risultati ([5]), il gruppo dei

---

([4]) G. Pompilj, *Sulla rappresentazione algebrica dei piani tripli*, «Rend. Sem. Mat.», Roma, (1939).

([5]) O. Chisini, *Sulle superficie di Riemann multiple prive di punti di diramazione*, «Rend. Lincei», (1915).

punti in cui la $p = 0$ interseca la φ stessa è equivalente a quelli secati su φ dalle curve aventi ordine metà di quello di $p = 0$.

La relazione (5) porta a considerare il modello proiettivo

$$z^3 + 3pz + q = 0$$

che diremo, con G. POMPILJ [6], modello proiettivo principale per un piano triplo diramato da φ, modello che, come è ovvio, è birazionalmente identico a quello generale dato dalla (4).

Viceversa, dato un modello principale, è possibile costruire infiniti modelli generali del tipo (4), tutti birazionalmente equivalenti tra loro.

Ora è noto che sussiste per la φ la relazione

$$f^2 \varphi = \Psi^2 - 4pp' \tag{6}$$

in cui i polinomii Ψ e p' sono definiti dalle

$$\begin{cases} f^2 \Psi = ad - bc \\ f^2 p' = bd - c^2 \end{cases}$$

Appare dalla (6) che la φ può essere considerata come curva di diramazione del piano doppio

$$pu^2 + \Psi u + p' = 0 \tag{7}$$

risolvente quadratico del piano triplo (4). Appare anche che le curve $p' = 0$ e $\Psi = 0$ sono aggiunte alla φ ed inoltre la $p' = 0$ è tangente alla φ ovunque la incontra. Il gruppo d'incontro, fuori delle cuspidi, sarà da noi indicato con T'. D'altra parte $\Psi = 0$ seca su φ, fuori delle cuspidi, il gruppo $T + T'$.

È ora facile provare la validità della seguente

OSSERVAZIONE I.ª — È possibile costruire un modello proiettivo di piano triplo, birazionalmente equivalente a quello assegnato, rappresentato dalla (4), tale che in relazione ad esso le curve $p' = 0$ e $\Psi = 0$ abbiano un ordine superiore ad un numero comunque alto.

Si assuma infatti la trasformazione birazionale

$$z = z_0 + \sigma$$

dove il polinomio in x, y σ, e quindi il suo grado che indicheremo con r, è arbitrario. Questa operata sul piano triplo (4) induce di conseguenza la trasformazione

$$u = u_0 + \sigma$$

sul piano doppio (7) risolvente.

---

[6] Cfr. G. POMPILJ, loc. cit. in [4].

Effettuata la trasformazione si ha un nuovo modello

$$a_0 z_0^3 + 3 b_0 z_0^2 + 3 c_0 z_0 + d_0 = 0$$

in cui

$$(8) \qquad \begin{cases} a_0 = a \\ b_0 = b + a\sigma \\ c_0 = c + 2b\sigma + a\sigma^2 \\ d_0 = d + 3c\sigma + 3b\sigma^2 + a\sigma^3 \end{cases}$$

Ed il corrispondente piano doppio

$$p_0 u_0^2 + \Psi_0 u_0 + p_0' = 0$$

ammette i coefficienti

$$(9) \qquad \begin{cases} p_0 = p \\ \Psi_0 = \Psi + 2p\sigma \\ p_0' = p' + \Psi\sigma + p\sigma^2 \end{cases}$$

Da queste relazioni, ed in particolare dall'ultima delle (9) si deduce che la curva $p_0' = 0$ ha l'ordine $2\nu + 2r$ ed è irriducibile, quando il polinomio σ sia generico. Infatti detta $\chi = 0$ una sua eventuale parte, essa dovrebbe essere comune alle curve $p = 0$, $\Psi = 0$ e $p' = 0$; e ciò si esclude perchè porterebbe di conseguenza che p e q non sono primi tra loro, avendosi facilmente

$$f q = a\Psi - 2bp$$

Analogamente dalla ultima delle (8) si ha che la curva $d_0 = 0$, quando σ sia generico, non passa per le cuspidi di φ e non ha singolarità su φ stessa.

A conclusione di quanto abbiamo osservato fin qui possiamo enunciare il

LEMMA I. — Dato un modello proiettivo di piano triplo diramato dalla φ, è possibile costruire un modello proiettivo principale ad esso birazionalmente equivalente

$$(10) \qquad z^3 + 3Pz + Q = 0$$

dove P e Q sono polinomii di ordini $2\nu'$ e $3\nu'$ rispettivamente, con ν' assegnato, purchè sufficientemente grande.

Infatti basta assumere il grado r del polinomio σ sopra considerato in modo che sia

$$\nu' = \nu + r$$

perchè si abbia

$$\begin{cases} f^2 P = b_0\, d_0 - c_0^2 \\ f^3 Q = d_0^2\, a_0 - 3\, b_0\, c_0\, d_0 + 2\, c_0^3 \end{cases}$$

dove $a_0\; b_0\; c_0\; d_0$ sono dati dalle (8) ed anche

$$d_0^2\, \varphi = 4\, P^3 + Q^2 \tag{11}$$

Di qui segnono per le curve $P = 0$ e $Q = 0$ le stesse proprietà che abbiamo dedotto dalla analoga relazione (5) per le $p = 0$ e $q = 0$; in particolare varrà la

Osservazione II.ª — La curva $P = 0$ è tangente alla φ ovunque la incontra; il gruppo Θ di contatto fuori delle cuspidi è tale che

$$\Theta + K \equiv \nu' R \tag{12}$$

È chiaro poi che tutti i gruppi Θ sono quelli secati su φ, al variare di σ, dalle curve del sistema

$$\Psi + 2\, p\, \sigma = 0$$

fuori delle cuspidi e del gruppo T. Possiamo quindi enunciare anche la

Osservazione III.ª — Detto π' il genere virtuale della φ (considerata virtualmente priva di singolarità) i gruppi Θ descrivono al variare di σ una serie lineare $g_{\nu' m - k}^{\nu' m - k - \pi'}$ di ordine $\nu' m - k$ e dimensione $\nu' m - k - \pi'$.

§ III. — Supponiamo ora che esista un secondo piano triplo diramato da φ e sia

$$a_1\, z^3 + 3\, b_1\, z^2 + 3\, c_1\, z + d_1 = 0$$

un suo modello proiettivo generale.

Applicando a questo le considerazioni del precedente paragrafo è chiaro che potremo anche in questo caso costruire un modello proiettivo principale

$$z^3 + P_1\, z + Q_1 = 0$$

ove P_1 e Q_1 hanno gli stessi ordini $2\,\nu'$ e $3\,\nu'$ scelti per P e Q purchè ν' sia stato scelto opportunamente alto.

Varrà anche in questo caso la relazione

$$d_1^2\, \varphi = 4\, P_1^2 + Q_1^2$$

analoga alla (11) e pertanto la curva $P_1 = 0$ sarà tangente alla φ (beninteso fuori delle cuspidi) in tutti i punti di un gruppo Θ_1 tale che sia

$$\Theta_1 + K \equiv \nu' R$$

Di qui e dalla (12) deduciamo che i gruppi Θ e Θ_1 sono equivalenti e pertanto appartengono alla stessa serie completa $|g_{m\nu'-k}|$ che possiamo sempre supporre non speciale e quindi di dimensione $m\nu' - k - \pi$, indicando con π il genere effettivo di φ.

Ma abbiamo visto che Θ descrive una serie $g_{m\nu'-k}^{m\nu'-k-\pi'}$: una serie analoga descrive Θ_1 e pertanto, quando sia

$$2(m\nu' - k - \pi') \geq m\nu' - k - \pi$$

tali due serie avranno un gruppo comune. Possiamo pertanto enunciare il

Lemma II. — Dati due qualunque piani tripli diramati da φ è sempre possibile costruire due loro modelli proiettivi principali

$$\text{(I)} \qquad z^3 + 3Pz + Q = 0$$

$$\text{(II)} \qquad z^3 + 3P_1 z + Q_1 = 0$$

tali che le curve $P = 0$ e $P_1 = 0$ hanno lo stesso ordine e toccano φ (fuori delle cuspidi) nello stesso gruppo di punti.

Pertanto per dimostrare che due qualunque piani tripli diramati da φ sono birazionalmente equivalenti basterà stabilire il fatto per due loro modelli principali (I) e (II). Osserviamo ora che nelle ipotesi poste, al fascio di curve determinate dalle $P = 0$ e $P_1 = 0$ appartiene una curva spezzata nella φ ed in una $\eta = 0$ residua. Si può pertanto scrivere

$$(13) \qquad P = \lambda P_1 + \eta\varphi$$

Sussiste pure la relazione analoga

$$(14) \qquad Q = \mu Q_1 + \xi\varphi$$

Ma, come è noto, la curva di diramazione φ è proiezione da Z_∞ della curva spaziale di contatto della superficie (I) con le rette parallele all'asse delle z. Tale curva spaziale φ^* ammette la rappresentazione monoidale

$$\varphi = 0; \quad 2Pz + Q = 0$$

Per la superficie (2) la curva analoga $\varphi_1{}^*$ ammette la rappresentazione

$$\varphi = 0; \quad 2 P_1 z + Q_1 = 0$$

e dalle relazioni (13) e (14) si deduce immediatamente che la φ^* è trasformata dalla $\varphi_1{}^*$ mediante la omologia avente centro in Z_∞

$$x' = x \qquad y' = y \qquad z' = \mu z / \lambda$$

Operiamo ora questa omologia sul modello (II); otterremo un modello

$$\text{(II')} \qquad (z')^3 + 3 z' P_1 \frac{\mu^2}{\lambda^2} + Q_1 \frac{\mu^3}{\lambda^3} = 0$$

che è tangente al cilindro $\varphi = 0$ lungo la curva φ^*.

Il nostro scopo sarà raggiunto se dimostreremo che sono birazionalmente equivalenti i modelli (I) e (II'). Diciamo ora F la superficie rappresentata dalla equazione (I) e F_1' quella rappresentata dalla (II') ed osserviamo che tutte le superficie appartenenti al fascio definito da queste sono tangenti al cilindro $\varphi = 0$ lungo la curva φ^*. Pertanto ogni piano triplo che si ottiene proiettando da Z_∞ una superficie di tale fascio sul piano $Z = 0$ ammette una curva di diramazione che si compone della curva $\varphi = 0$ ***fissa*** e di una curva $\theta = 0$ variabile al variare della superficie nel fascio, la quale si riduce ad una parte doppia (non diramante) quando la superficie coincide con F oppure con F_1'.

Osserviamo ora che su ogni retta ρ del piano $z = 0$ un tale piano triplo determina una funzione algebrica a tre valori di una sola variabile (retta tripla), avente come gruppo di diramazione le intersezioni di ρ con la curva di diramazione.

Dimostreremo che le rette triple definite dalle due superficie F ed F_1' su una retta generica del piano $z = 0$ sono birazionalmente equivalenti, con che risulteranno birazionalmente equivalenti anche le due superficie.

Infatti fissiamo nel piano $z = 0$ un generico fascio di rette, avente il centro in un punto G che per semplicità possiamo assumere nel punto Y_∞ supposto in funzione generica rispetto alla curva φ. Allora su ogni retta $x = x_0$ la curva

$$\varphi(x, y) = 0$$

determina un gruppo di m punti $y_1, y_2, \ldots, y_m$, soluzioni della

$$\varphi(x_0, y) = 0$$

Fissiamo ora nel piano π_y della variabile complessa y con una legge qualunque un sistema Γ di cappi $\gamma_1 \dots \gamma_m$ i quali, per ogni x_0 vadano a circondare i punti $y_1\, y_2 \dots y_m$ partendo dal punto $y = \infty$.

È chiaro che i nostri due piani tripli diramati dalla φ determinano sulla retta $x = x_0$ due funzioni algebriche della sola variabile y, che diramano nei punti $y_1, y_2, \dots, y_m$.

Fissiamo ora nel punto $y = \infty$ i nomi delle determinazioni di queste funzioni; è noto che esse risultano birazionalmente identiche se si possono scegliere i nomi in $y = \infty$ in modo tale che ogni cappio del sistema Γ operi lo stesso scambio sulle determinazioni delle due funzioni.

Ora se questo avviene per un valore di x_0 avviene per tutti, cioè in tutto il piano.

Facciamo infatti variare per continuità il parametro x_0 in modo che descriva, nel piano π_x della variabile complessa x, un sistema fondamentale di cammini chiusi circondanti le diramazioni della funzione algebrica $y(x)$ definita dalla equazione $\varphi(x, y) = 0$.

Così i punti $y_1 \cdot y_2 \dots y_m$ descrivono la treccia caratteristica della curva φ [7]; dalle cui proprietà topologiche dipende il variare degli scambi operati sulle funzioni $z(y)$ dai cappi $\gamma_1 \dots \gamma_m$.

Poichè la treccia caratteristica è la stessa (in quanto essa è rappresentativa della φ) le funzioni stesse diramano quindi ugualmente in tutto il piano.

§ IV. — Consideriamo ora una superficie generica appartenente al fascio definito dalle due superfici $F = 0$ ed $F_1' = 0$. Chiamiamo α

---

[7] Per quanto riguarda il concetto di treccia caratteristica (o fascio caratteristico) di una curva algebrica e le sue applicazioni alla teoria delle funzioni algebriche di due variabili, si veda per es.:

O. Chisini, *Una suggestiva rappresentazione reale per le curve algebriche piane*, «Rend. Ist. Lomb.», (1933).

— *La rappresentazione torica di una curva algebrica nell'intorno di un punto singolare*, «Rend. Ist. Lomb.», (1936).

— *Un teorema di esistenza dei piani multipli*, «Rend. Lincei», (1934).

— *Sulla curva di diramazione dei piani multipli*, «Rend. Lincei», (1936).

— *Un più generale teorema di esistenza dei piani multipli*, «Rend. Lincei», (1938).

C. F. Manara, *Esistenza topologica di diramazioni negative per le curve doppie*, «Rend. Lincei», (1947).

Modesto Dedò, *Algebra delle treccie caratteristiche ecc.*, «Rend. Ist. Lomb.», (1950).

il parametro del fascio e poniamo che F ed F' corrispondano ai valori $\alpha = 0$ ed $\alpha = 1$ del parametro α. Fissato un valore generico $x = x_0$ cioè una retta ρ generica del fascio avente centro Y_∞, è chiaro che F_α definisce su ρ una retta tripla variabile con continuità in funzione di ρ stesso, cioè una funzione algebrica $z_\alpha(y)$ a tre valori della sola variabile y, a punti di diramazione isolati. Precisamente il gruppo Δ dei punti di diramazione di $z_\alpha(y)$ è dato dal gruppo di m punti $\delta_1 \dots \delta_m$ intersezioni di ρ con φ, non variabili in funzione di α, e da altri punti $\delta'_1 \dots \delta'_l$ variabili in funzione di α che, per i valori $\alpha = 0$ ed $\alpha = 1$ confluiscono a coppie in certi gruppi di punti $\delta'_{01}, \delta'_{02}, \dots, \delta'_{0l}$; $\delta'_{11}, \delta'_{12}, \dots, \delta'_{1l}$ rispettivamente.

Come è noto [8] i valori della funzione $z_\alpha(y)$ si ottengono razionalmente da quelli di una funzione W a sei valori il cui gruppo di monodromia è isomorfo a quello di z; la funzione W è notoriamente radice della risolvente di Galois della funzione z.

Ci occuperemo di questa seconda funzione, la quale si costruisce come segue:

Si definisce anzitutto una funzione a due valori della y diramata nel gruppo Δ

$$v^2 = 4\, P_\alpha^3 + Q_\alpha^2$$

che determina quindi, nel piano y, z una curva iperellittica Ω_α sulla quale le rette $y = \text{cost.}$ secano la g_2^1 costituita dalle dette coppie di valori della v.

Indi si determina sulla Ω_α una funzione irriducibile a tre valori a gruppo ciclico

$$W^3 = -Q_\alpha + v$$

la quale, poichè i punti di diramazione di z sono isolati, è priva di punti di diramazione sulla riemanniana della curva Ω_α e pertanto deve diramare soltanto lungo i cicli riemanniani della Ω_α stessa.

Come è chiaro, al tendere di α ai diversi valori 0 oppure 1 la curva iperellittica Ω_α tenderà a due diverse curve ω_0, ω_1 rispettivamente, aventi lo stesso gruppo di diramazione $\delta_1 \dots \delta_m$, e perciò birazionalmente equivalenti.

Conseguentemente la funzione W_α tenderà a due funzioni w_0 e w_1 a gruppo ciclico sulla ω_0 e sulla ω_1 rispettivamente, le quali, per le ipotesi poste, non hanno punti di diramazione isolati e quindi diramano soltanto lungo cicli riemanniani.

---

(8) C. Tibiletti, *Sulle curve triple prive di punti di diramazione*, «Rend. Ist. Lomb.», Vol. 79 (1945).

Per comodità potremo fissare una nuova curva iperellittica ω avente lo stesso gruppo di diramazione di ω_0 ed ω_1 e quindi birazionalmente equivalente ad esse. Potremo allora vedere ambedue le funzioni w_0 e w_1 sulla riemanniana della ω e, come è noto ([9]) avremo dimostrato che esse sono birazionalmente equivalenti se avremo dimostrato che ammettono la stessa sostituzione del gruppo ciclico per lo stesso ciclo riemanniano di ω.

A tal fine osserviamo che tra i cicli riemanniani di Ω_α alcuni degenerano sia quando α tende al valore 0 che quando tende ad 1 valori che corrispondono alle curve limiti ω_0 ed ω_1 mentre altri tendono ai cicli di queste ultime curve; e precisamente questi ultimi si costruiscono in base ai punti di diramazione $\delta_1 \ldots \delta_m$ fissi al variare di α.

Ora è facile verificare che due cicli riemanniani di ω_0 ed ω_1 che sono limiti dello stesso ciclo di Ω_α hanno su ω immagini che differiscono tra loro soltanto per cammini nulli (di ω stessa) cioè sono equivalenti.

Ma variando α per continuità non può variare la sostituzione della funzione W_α operata da un dato ciclo di Ω_α e, se questo al limite non degenera, tale sostituzione è la stessa per i valori della w_0 (e della w_1) sul corrispondente ciclo di ω_0 (e di ω_1).

Osserviamo ora che le funzioni w_0 e w_1 non hanno punti di diramazione su ω_0 ed ω_1 e quindi nemmeno su ω. Pertanto cicli equivalenti possono essere ricondotti a coincidere per continuità senza che varii la corrispondente sostituzione da essi operata su w_0 e w_1. Ne consegue che queste due funzioni hanno le stesse sostituzioni sugli stessi cicli di ω e pertanto lo stesso gruppo di monodromia. Dunque le corrispondenti rette triple sono birazionalmente equivalenti.

Possiamo quindi concludere enunciando il

Teorema. — È unico il piano triplo diramato da una curva φ irriducibile generica del sistema continuo di curve di diramazione aventi lo stesso ordine e le stesse singolarità.

Milano, Aprile 1951.

([9]) C. Tibiletti, loc. cit. in ([8]).